**WS 2014/2015**

# Ergänzungen zur klassischen Physik: Solitonen, Monopole, Instantonen

Olaf Lechtenfeld

12.12.2014

# Präsenzübung 4

## P6: Sigma-Modell: $O(3) = \mathbb{CP}^1$

Wir formulieren das $O(3)$-Sigma-Modell um. Statt der stereographischen Koordinaten $R \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq S^2$ verwenden wir die projektiven Koordinaten

$$|T\rangle \;\coloneqq\; \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \quad \text{mit} \quad |T\rangle \;\sim\; |T\rangle \cdot \lambda \quad \text{für} \;\; \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Für $q \neq 0$ kann man $\lambda = q^{-1}$ wählen, so dass

$$|T\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ p/q \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix}$$

(für $q = 0$ nimmt man $\lambda = p^{-1}$ und erhält $|T\rangle = \left(\begin{smallmatrix} R^{-1} \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$). Jede Äquivalenzklasse $[|T\rangle]$ ist eine komplexe Ursprungsgerade („Strahl") in $\mathbb{C}^2$ und wird eindeutig repräsentiert durch den hermiteschen Projektor

$$P \;=\; \frac{|T\rangle\langle T|}{\langle T|T\rangle} \;=\; \frac{1}{|q|^2 + |p|^2} \begin{pmatrix} q\overline{q} & q\overline{p} \\ p\overline{q} & p\overline{p} \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{1 + \overline{R}R} \begin{pmatrix} 1 & \overline{R} \\ R & R\overline{R} \end{pmatrix}$$

da $|T\rangle$ und $|T\rangle \cdot \lambda$ den selben Projektor liefern.

a) Beweisen Sie die Identitäten

$$\begin{aligned} &P^2 \;=\; P \;, \quad P\,|T\rangle \;=\; |T\rangle \;, \quad (1-P)\,|T\rangle \;=\; 0 \;, \quad \operatorname{tr} P \;=\; 1 \;, \\ &P\,\mathrm{d}P \;=\; \mathrm{d}P\,(1-P) \;, \quad (1-P)\,\mathrm{d}P \;=\; \mathrm{d}P\,P \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2} \operatorname{tr} \partial_\mu P \, \partial^\mu P \;=\; \frac{\langle \partial_\mu T |\, 1 - P \,| \partial^\mu T \rangle}{\langle T|T\rangle} \;=\; \frac{\partial_\mu \overline{R} \; \partial^\mu R}{(1 + \overline{R}R)^2} \,.$$

*Hinweis:* Argumentieren Sie, dass $\frac{1}{2} \operatorname{tr} \partial_\mu P \, \partial^\mu P = \operatorname{tr} \partial_\mu P \, (1-P) \, \partial^\mu P$ und berechnen Sie $\partial_\mu P \, (1-P)$ und $(1-P) \, \partial_\mu P$ unter Verwendung von $(1-P)|T\rangle = 0 = \langle T|(1-P)$ sowie $\operatorname{tr} |a\rangle\langle b| = \langle b|a\rangle$.

c)* Berücksichtigen Sie die Nebenbedingung $P(1-P)=0$ mit Hilfe einer Lagrange-Multiplikator-Matrix $\Lambda$ und variieren Sie die Wirkung

$$S \;=\; \int \mathrm{d}^2x \left\{ \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\partial_\mu P\,\partial^\mu P + \mathrm{tr}\,\Lambda P(1-P) \right\}$$

um die Bewegungsgleichung zu finden.

*Hinweise:* Schreiben Sie $\mathrm{tr}(\Lambda P^2) = \mathrm{tr}(P\lambda P)$. Multiplizieren Sie $\Box P = (...)$ einmal von links und einmal von rechts mit $P$ und vergleichen Sie.

## P7: Lump-Dynamik in adiabatischer Approximation

Bei „langsamer“ Zeitabhängigkeit kann die zeitabhängige Lösung der Bewegungsgleichung approximiert werden durch einer Abfolge statischer Lösungen:

$$R(z,\overline{z},t) \;\approx\; R(z;\alpha(t)) \quad \text{mit Moduli} \;\; \alpha \;=\; (\alpha_i \in \mathbb{C})\,,$$

so dass $\dot{R}(z,\overline{z},t) \approx \sum_i \partial_{\alpha_i} R(z;\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}_i(t)$. Die kinetische Energie nimmt damit die folgende Form an:

$$T \;=\; \int \mathrm{d}^2x \frac{|\dot{R}|^2}{(1+|R|^2)^2} \;\approx\; \sum_{ij} \dot{\alpha}_i \dot{\overline{\alpha}}_j \int \mathrm{d}^2x \frac{\partial_{\alpha_i} R\, \partial_{\overline{\alpha}_j} \overline{R}}{(1+R\overline{R})^2} \;=:\; \sum_{ij} g_{ij}(\alpha,\overline{\alpha}) \dot{\alpha}_i \dot{\overline{\alpha}}_j\,,$$

was eine Metrik $g_{ij}$ im Modulraum definiert. Kürzer:

$$g_{ij}(\alpha,\overline{\alpha}) \;=\; \partial_{\alpha_i}\partial_{\overline{\alpha}_j} K(\alpha,\overline{\alpha}) \quad \text{mit} \;\; K(\alpha,\overline{\alpha}) \;=\; \int \mathrm{d}^2x \ln(1+R\overline{R})\,. \qquad (*)$$

a) Für den Fall $N=1$ lautet die allgemeine BPS-Lösung

$$R(z;\beta,\delta) \;=\; \frac{\beta}{z-\delta}\,.$$

Halten Sie $\beta$ fest (divergente Trägheit) und bestimmen Sie die Metrik für eine zeitliche Variation von $\delta$:

$$g_{\delta\overline{\delta}} \;=\; \int \mathrm{d}^2x\,(1+R\overline{R})^{-2} |\partial_\delta R|^2$$

Welche Bewegung folgt für den Modulus $\delta$? Warum ist $g_{\delta\delta} = 0$? Vergleichen Sie mit $E_{\text{statisch}} = 2\int \mathrm{d}^2x \frac{|\partial_z R|^2}{(1+R\overline{R})^2} = 2\pi N = 2\pi$.

b)* Im Fall $N=2$ spezialisieren wir auf

$$R(z;\gamma,\epsilon) \;=\; \frac{\gamma}{z^2+\epsilon}\,.$$

Berechnen Sie das Kählerpotential (*) so weit wie möglich. Können sie verifizieren, dass $E_{\text{statisch}} = 4\pi$?